Adição e Subtração de Arcos
Secante, Cossecante e Cotangente
Exercícios de Vestibular Envolvendo Trigonometria

Índice

Introdução

Na aula anterior, vimos a origem da Trigonometria bem como a equação de 2^0 grau (Problema do Quadrado). Em continuação veremos secante, cossecante , cotangente, soma de arcos e algumas identidades trigonométricas que serão muito úteis na resolução de exercícios de vestibular das grandes **"Universidades"** (FUVEST, ITA, UNICAMP, FEI, MAUÁ entre outras).

Lembre-se que o sucesso de uma pessoa depende muito mais de sua **vontade** do que de sua **inteligência**. Aproveite.

Nomes de grandes matemáticos que ajudaram a construir a Trigonometria:

Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.)

Ptolomeu do Egito (90-165 d.C.)

Aryabhata (476-550)

VarahamihiraBrahmagupta

Muhammad ibn Mūsā al-Kwārizmī

Abū al-Wafā' al-Būzjānī

Omar Khayyam

Bhāskara II

Nasir al-Din al-Tusi

Ghiyath al-Kashi (século XIV)

Ulugh Beg (século XIV)

Madhava de Sangamagramma (c. 1400)

Regiomontanus (1464)

RheticusValentin Otho

Estudante de Rheticus

Leonhard Euler(1748)

Este último, devemos destacar em função dos grandes e inúmeros trabalhos publicados (mais de quinhentos trabalhos originais em várias áreas do conhecimento) dentre estes podemos destacar "***Introductio in analysin infinitorum"*** (análise de funções trigonométricas em termos de séries infinitas). Podemos considerá-lo o responsável por estabelecer o tratamento analítico das funções trigonométricas na Europa, também as definindo como séries infinitas e apresentando a **"fórmula de Euler"**, bem como as abreviações quase modernas *sin., cos., tang., cot., sec.,* e *cosec.*

Adição e Subtração de Arcos

Demonstração sen(a+b), sen(a-b), cos(a+b), cos(a-b), tg(a+b) e tg(a-b)

a) sen(a+b) e cos(a+b)

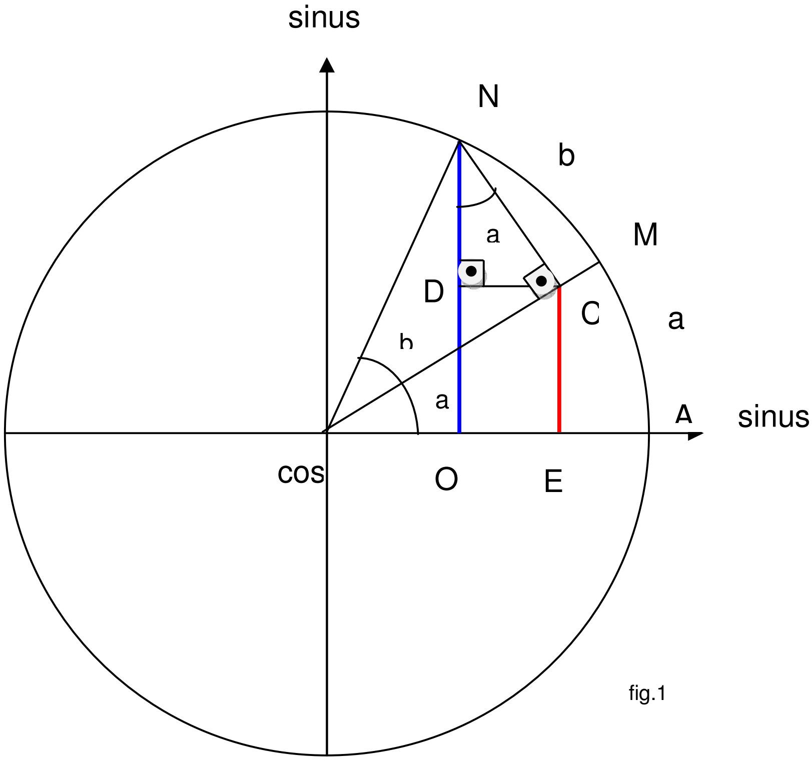

fig.1

$M\hat{O}A = N'\hat{N}C$ são ângulos de lados perpendiculares

$$senb = NC$$
$$\cos b = OC$$

Do $\Delta CDN : sena = \frac{DC}{NC} = \frac{DC}{senb} \therefore DC = sena \cdot senb$

$$\cos a = \frac{DN}{NC} = \frac{DN}{senb} \therefore DN = senb \cdot \cos a$$

Do $\Delta OEC : sena = \frac{EC}{OC} = \frac{EC}{\cos b} \therefore EC = sena \cdot \cos b$

$$\cos a = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{\cos b} \therefore OE = \cos a \cdot \cos b$$

$$\Rightarrow sen(a+b) = N'N = N'D + DN = EC + DN$$

Logo $sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a$

$$\Rightarrow \cos(a+b) = ON' = OE = N'E = OE - DC$$

Logo $\Rightarrow \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$

b) sen(-x)=-senx

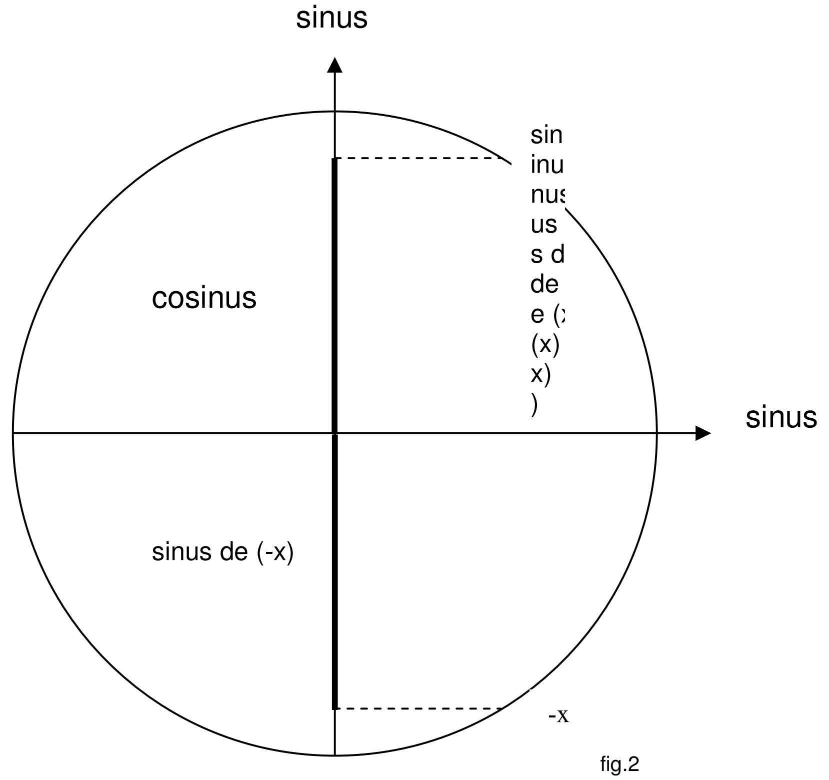

fig.2

sen(-x) = -senx

c) cosx=cos(-x)

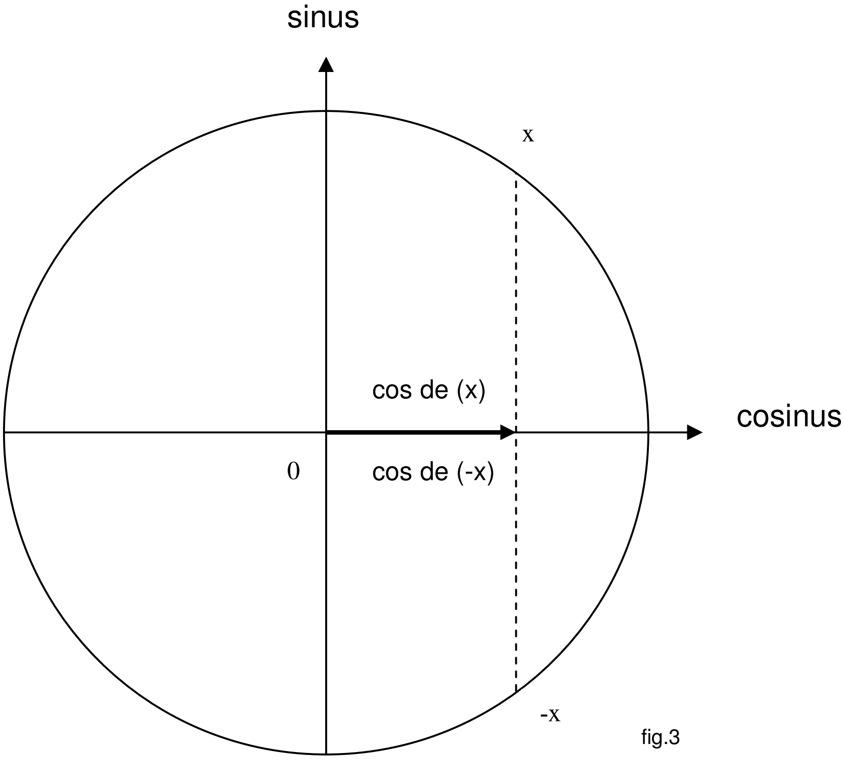

fig.3

cos(-x) = cos x

d) sen(a-b) e cos(a-b)

$$sen(a-b) = sen[a+(-b)] = sena \cdot \cos(-b) + sen(-b) \cdot \cos a$$

como $\cos(-b) = \cos b$

$$sen(-b) = -senb$$
$$\therefore sen(a-b) = sena \cdot \cos b - senb \cdot \cos a$$
$$\therefore \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb$$

e) tg (a+b)

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{sena\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\dfrac{senb\cdot\cos a}{\cos a\cdot cob}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\dfrac{sena\cdot senb}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{sena}{\cos a}+\dfrac{senb}{\cos b}}{1-\dfrac{sena}{\cos a}\cdot\dfrac{senb}{\cos b}}$$

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}$$

Sendo que :

$$1-tga\cdot tgb\neq 0$$

Por **paridade**

$$tg(-x)=\frac{sen(-x)}{\cos(-x)}$$

$$tg(-x)=\frac{-senx}{\cos x}$$

$$tg(-x)=-tg(x)$$

f) tg(a-b)

$$tg(a-b) = tg[a+(-b)]$$

$$tg(a-b) = \frac{tga + tg(-b)}{1 - tga \cdot tg(-b)}$$

Arco Duplo

Sabemos que:

$$sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a$$

$$sen(a+a) = sena \cdot \cos a + sena \cdot \cos a$$

$$\therefore sen2a = 2sena \cdot \cos a$$

e também:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$$

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - sena \cdot sena$$

$$\therefore \cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$$

Obs:

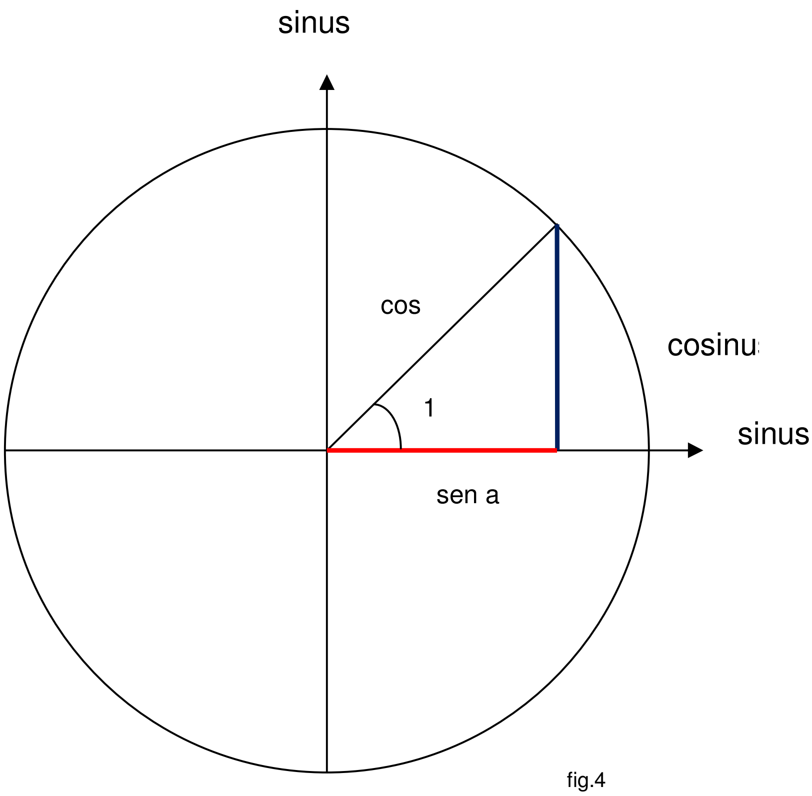

fig.4

Por Pitágoras vem:

$$sen^2 a + \cos^2 a = 1^2$$

$$\Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right)$$

$$\cos 2a = -1 + 2\cos^2 a$$

Ex:

$$sen4x = sen(2x + 2x) = sen2x \cdot \cos 2x + \cos 2x \cdot sen2x$$

$$\Rightarrow sen4x = 2sen2x \cdot \cos 2x$$

Secante, Cossecante e Cotangente

Tangente vem do latim *tangens*, que significa *tocando*, já que a linha *toca* o círculo unitário

Secante origina-se do latim *secans* — "cortando" — já que a linha *corta* o círculo.

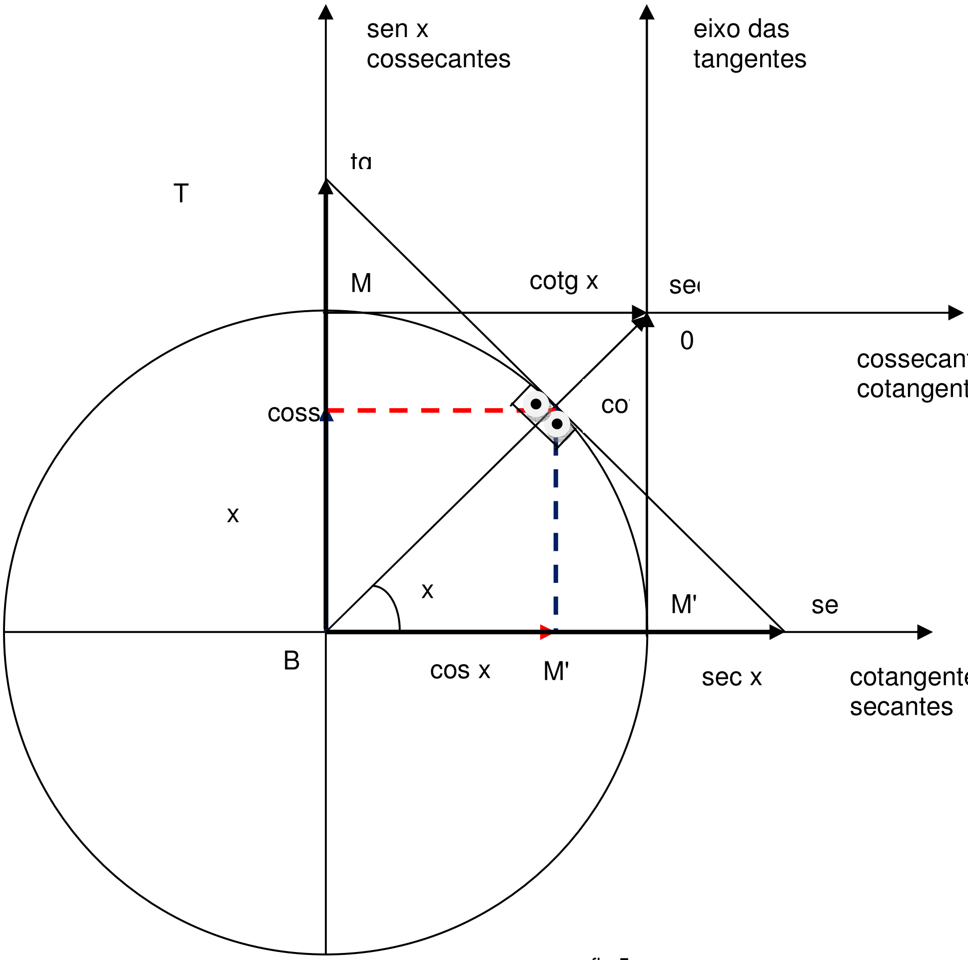

fig.5

Com Base no desenho acima:

$$\cot gx = \overrightarrow{BT}$$

$$\sec x = \overrightarrow{OR}$$

$$\cos\sec x = \overrightarrow{OC}$$

Obs: Do $\Delta BOT \approx \Delta ATO \Rightarrow \dfrac{\cot gx}{1} = \dfrac{1}{tgx}$

$$\Rightarrow \cot gx = \frac{1}{tgx}$$

$$\Delta MSO \approx \Delta M''MO \Rightarrow \frac{\sec x}{1} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Delta MOC \approx \Delta M'OM \Rightarrow \frac{\cos\sec x}{1} = \frac{1}{senx}$$

$$\Rightarrow \cos\sec x = \frac{1}{senx}$$

Tabela Trigonométrica de Ângulos Fundamentais

arco	x°	sen(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)	sec(x)	csc(x)
0	0°	0	1	0	não existe	1	não existe
$\pi/6$	30°	½	½ $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	2 $\sqrt{3}/3$	2
$\pi/4$	45°	½ $\sqrt{2}$	½ $\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	60°	½ $\sqrt{3}$	½	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	2 $\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90°	1	0	não existe	0	não existe	1
$2\pi/3$	120°	½ $\sqrt{3}$	-½	- $\sqrt{3}$	- $\sqrt{3}/3$	-2	2 $\sqrt{3}/3$
$3\pi/4$	135°	½ $\sqrt{2}$	-½ $\sqrt{2}$	-1	-1	- $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$5\pi/6$	150°	½	-½ $\sqrt{3}$	- $\sqrt{3}/3$	- $\sqrt{3}$	-2 $\sqrt{3}/3$	2
π	180°	0	-1	0	não existe	-1	não existe
$7\pi/6$	210°	-½	-½ $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	-2 $\sqrt{3}/3$	-2
$5\pi/4$	225°	-½ $\sqrt{2}$	-½ $\sqrt{2}$	1	1	- $\sqrt{2}$	- $\sqrt{2}$
$4\pi/3$	240°	-½ $\sqrt{3}$	-½	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	-2	-2 $\sqrt{3}/3$
$3\pi/2$	270°	-1	0	não existe	0	não existe	-1
$5\pi/3$	300°	-½ $\sqrt{3}$	½	- $\sqrt{3}$	- $\sqrt{3}/3$	2	-2 $\sqrt{3}/3$
$7\pi/4$	315°	-½ $\sqrt{2}$	½ $\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	- $\sqrt{2}$
$11\pi/6$	330°	-½	½ $\sqrt{3}$	- $\sqrt{3}/3$	- $\sqrt{3}$	2 $\sqrt{3}/3$	-2
2π	360°	0	1	0	não existe	1	não existe

fig.6

Exercícios de Vestibular

1) **ITA**

Sendo sen x = -1, calcular o sen 2x

2) **FEFISA**

Se 3 senx + 4 cosx =5. Então senx + cosx é igual a:

a) 1/5 b) 3/5 c) -1/5 d) 7/5

3) **FUVEST**

Calcular senx + sen2x + sen3x + ...=1 ; $0 < x < \pi/2$

4) **FAAP**

Resolva a equação tgx – 2 senx = 0 ; $0 \leq x \leq \pi/2$

5) **FEI**

Determinar x, sabendo que $\pi/2 < x < \pi$ tal que 3 tgx = 2 cosx

Senhores até a próxima aula.
Foi um prazer.

Referências Bibliográficas

- História da Matemática – Carl B. Boyer- 2ª edição- editora Edgard Blucher ltda.
- Wikipédia. fig.6